ECOLE NATIONALE SUPERIEURE
DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET
DES MINES DE DOUAI

CONCOURS D'ADMISSION 1992

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 heures)

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Elle est paginée de 1/4 à 4/4.

PREMIER PROBLEME

Dans tout le problème , f désigne la fonction $\begin{cases} [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{x^2} \end{cases}$.

1°/ Déterminer le nombre $M = \sup_{x \in [0,1]} \{ |f''(x)| \}$.

2°/ Montrer qu'il existe une et une seule fonction u définie sur $[0,1]$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in [0,1] \ , \ u'(x) = f(x) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

[on ne cherchera pas à expliciter la fonction u à l'aide des fonctions usuelles] .

Dans la suite , on se propose de déterminer les valeurs prises par u en certains points de $[0,1]$.

3°/ Pour tout nombre entier n non nul , on pose $h = \frac{1}{n}$ et on définit les $(n+1)$ nombres réels u_i par :

$$\forall\, i \in \{ 0, 1, \ldots, n \} \ , \ u_i = u(ih)$$

Démontrer qu'il existe n nombres réels $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ vérifiant les quatre conditions :

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = h\, u'\left(\frac{h}{2}\right) + K_0\, h^3 \\ |K_0| \leq \frac{M}{24} \\ \forall\, i \in \{ 1, \ldots, n-1 \} \ , \ u_{i+1} - u_{i-1} = 2h\, u'(ih) + K_i\, h^3 \\ \forall\, i \in \{ 1, \ldots, n-1 \} \ , \ |K_i| \leq \frac{M}{3} \end{cases}$$

page 358 2/4 1992
Ecole des Mines DOUAI

4°/ On définit les (n+1) nombres réels v_i par les relations :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_1 = h\, f\left(\frac{h}{2}\right) \\ \forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\} \ , \quad v_{i+1} - v_{i-1} = 2\, h\, f(ih) \end{cases}$$

Pour tout i appartenant à { 0, 1, ..., n } , exprimer v_i en fonction de h et de i , à l'aide de la fonction f .

[on pourra distinguer les cas i *pair et* i *impair]* .

5°/ On définit les (n+1) nombres réels $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ par :

$$\forall\, i \in \{0, 1, \ldots, n\} \ , \quad \delta_i = | v_i - u_i | \ .$$

a) Déterminer δ_0 et montrer que $\delta_1 \leq \frac{M}{24}\, h^3$.

b) Démontrer que $\forall\, i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $| \delta_{i+1} - \delta_{i-1} | \leq \frac{M}{3}\, h^3$.

6°/ En déduire qu'il existe deux nombres réels positifs G_1 et G_2 tels que

$$\begin{cases} \forall\, p \leq \mathbb{E}\left(\frac{n}{2}\right) \ , & \delta_{2p} \leq G_1\, h^2 \\ \forall\, p \leq \mathbb{E}\left(\frac{n-1}{2}\right) \ , & \delta_{2p+1} \leq G_2\, h^2 \end{cases}$$

$\mathbb{E}$ désignant la fonction " partie entière " .

7°/ *Application numérique :* on choisit n = 10 .

a) Pour tout i appartenant à {0,1,2,...,10} , calculer v_i en présentant les résultats avec 4 décimales .

b) Déterminer une majoration de l'erreur commise en prenant pour valeurs approchées des u_i les nombres v_i .

DEUXIEME PROBLEME

Les parties A , B et C peuvent être traitées indépendamment , mais il sera judicieux d'utiliser les liens entre ces différentes parties .

Partie A

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 .

A tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$ on fait correspondre le polynôme $\varphi(P)$ tel que :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1) P'' + 2 X P'$$

1°/ Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme φ d'espace vectoriel dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2°/ Ecrire la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

3°/ Déterminer l'image et le noyau de φ .

4°/ On note id l'identité dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on considère un nombre réel λ .

a) Montrer que $(\varphi - \lambda\, id)$ est bijectif, sauf pour un nombre fini de valeurs de λ que l'on précisera .

b) On appelle δ la plus grande des valeurs trouvées en (4°/a) . Déterminer le noyau de $(\varphi - \delta\, id)$.

Partie B

On désigne par I l'intervalle réel $[-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}]$ et on considère sur I l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad (x^2 - 1)\, y'' + 2\, x\, y' - 6\, y = 0$$

1°/ Déterminer les fonctions polynômes solutions de $(\mathcal{E})$.

2°/ Soit K la fonction polynôme solution de $(\mathcal{E})$ vérifiant $K(0) = 1$.

On définit la fonction f sur I par :

$$\forall\, x \in I \ , \ f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)\, K^2(x)}$$

On appelle F la primitive de f s'annulant en 0 .

a) Montrer que la fonction KF est solution de $(\mathcal{E})$.

b) Expliciter F .

3°/ Sachant que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ constitue un espace vectoriel de dimension 2 , déterminer $\mathcal{S}$.

Partie C

Soit d un nombre entier strictement positif et soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$ des nombres réels deux à deux distincts et différents de -1 et de +1 .

On considère le polynôme L tel que $L(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - \tau_k)$ et la fraction rationnelle R telle que $R(X) = \dfrac{1}{(X^2 - 1)\, L^2(X)}$.

On sait qu'il existe $(2d+2)$ nombres réels $\alpha, \beta, A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_d$ tels que :

$$R(X) = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\beta}{X + 1} + \sum_{k=1}^{d} \frac{A_k}{(X - \tau_k)^2} + \sum_{k=1}^{d} \frac{B_k}{(X - \tau_k)} \quad .$$

1°/ Calculer α et β en fonction de $L(1)$ et $L(-1)$.

2°/ Exprimer A_k en fonction de τ_k et de $L'(\tau_k)$.

3°/ Exprimer B_k en fonction de τ_k , de $L'(\tau_k)$ et de $L''(\tau_k)$.

4°/ On définit le polynôme S par : $S(X) = (X^2 - 1)\, L''(X) + 2\, X\, L'(X)$.
Prouver l'équivalence :

$$(\forall\, k \in \{ 1, 2, \ldots, d \} \ , \ B_k = 0) \Leftrightarrow (\exists\, \mu \in \mathbb{R} \ ; \ S = \mu\, L)$$

et exprimer μ , quand il existe , en fonction de d .

5°/ Dans le cas où d est égal à 2 , déterminer le polynôme L tel que :

$$\forall\, k \in \{ 1 , 2 \} \ , \ B_k = 0 \quad .$$